

Ad-Soyad:

30.06.2022

Numara:

SOYUT MATEMATİK II BÜTÜNLEME SINAV SORULARI

- 1) $[(a,c)] \odot [(b,d)] = [(1,5)]$ ve $[(x,c)] \odot [(y,d)] = [(1,3)]$ ise $[(x,a)] \odot [(y,b)] = ?$
- 2) Doğal sayılarda çarpma ve toplama işlemlerinin birleşme özelliği var mıdır? Gösteriniz.
- 3) Tam sayılarda çarpma işleminin kısaltma özelliği var mıdır? Gösteriniz.
- 4) a) X ve Y iki küme olmak üzere X kümesi sonlu ise $X - Y$ kümesinin sonlu olup olmadığını inceleyiniz.
b) A ve B iki küme olmak üzere $A \subseteq B$ olsun. A sonsuz bir küme ise B kümesinin sonlu ya da sonsuz bir küme olup olmadığını araştırınız.
c) İrrasyonel sayılar kümesi sayılabilir mi? Gösteriniz.

NOT: Sınav süresi 90 dakikadır.

CEVAPLAR

BAŞARILAR

$$1) [(a,c)] \odot [(b,d)] = [(1,5)] \Rightarrow [(ab,cd)] = [(1,5)]$$

$$\Rightarrow ab \cdot 5 = cd \cdot 1$$

$$\Rightarrow 5ab = cd \quad \dots \textcircled{1}$$

$$[(x,c)] \odot [(y,d)] = [(1,3)] \Rightarrow [(xy,cd)] = [(1,3)]$$

$$\Rightarrow xy \cdot 3 = cd \cdot 1$$

$$\Rightarrow 3xy = cd \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den $3xy = 5ab$ dir. \odot halde

$$[(x,a)] \odot [(y,b)] = [(xy,ab)] = [(5,3)] \quad \text{olur.}$$

2) $A = \{ p \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ i\u00e7in } (mn)p = m(np) \} \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$A = \mathbb{N}$ mi?

• $0 \in A$ mi?

$$\left. \begin{array}{l} (mn) \cdot 0 = 0 \\ m \cdot 0 = 0 \Rightarrow m(n \cdot 0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (mn)0 = m(n0) \\ \Rightarrow 0 \in A$$

• $\forall p \in A$ i\u00e7in $p^+ \in A$ mi?

$$p \in A \Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ i\u00e7in } (mn)p = m(np) \dots \textcircled{1}$$

$$p^+ \in A \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ i\u00e7in } (mn)p^+ = m(np^+)$$

$$\begin{aligned} (mn)p^+ &= (mn)p + mn \\ &= m(np) + mn \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} m(np + n) = m(np^+) \end{aligned}$$

$$\therefore p^+ \in A$$

$$\therefore A = \mathbb{N}$$

Toplama i\u015fleminin birle\u015fme \u015felli\u011fi de benzer \u015fekilde g\u00f6sterilir.

3) $x = \{a, b\}, y = \{c, d\}, z = \{e, f\} \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$xz = yz, z \neq 0 \Leftrightarrow x = y \quad ?$$

$z \neq 0$ oldu\u011fundan $e \neq f$ olmalıdır.

$$xz = yz \Leftrightarrow \{a, b\} \{e, f\} = \{c, d\} \{e, f\}$$

$$\Leftrightarrow \{ae + bf, af + be\} = \{ce + df, cf + de\}$$

$$\Leftrightarrow (ae + bf, af + be) \sim (ce + df, cf + de)$$

$$\Leftrightarrow (ae+bf) + (cf+de) = (af+be) + (ce+df)$$

$$\Leftrightarrow e(a+d) + f(b+c) = e(b+c) + f(a+d)$$

$$\Leftrightarrow a+d = b+c$$

$e \neq f$

$$\Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow [a,b] = [c,d]$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

4) a) $X-Y = X \cap Y' \subseteq X$ olduğundan $X-Y$ sonlu bir kümedir.

b) Sonlu bir kümenin alt kümesi sonludur.

Yani;

$$A \subseteq B \text{ iken } \underbrace{B \text{ sonlu}}_p \Rightarrow \underbrace{A \text{ da sonludur.}}_q$$

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğundan A sonsuz bir küme ise

B de sonsuz bir kümedir.

c) \mathcal{Q}' irrasyonel sayılar kümesi sayılabilir olsun.

$\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}' = \mathbb{R}$, \mathcal{Q} ve \mathcal{Q}' sayılabilir iki küme olup sayılabilir kümelerin sonlu birleşimi de sayılabilir olduğundan \mathbb{R} sayılabilir olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla

\mathcal{Q}' irrasyonel sayılar kümesi sayılamaz.